On the coefficient of weak orthogonality and normal structure (Nonlinear Analysis and Convex Analysis)

AUTHOR(S):

田村, 高幸; 加藤, 幹雄; 高橋, 泰嗣

数理解析研究所講究録
第 1643 巻 2009 年 112-115

On the coefficient of weak orthogonality and normal structure

千葉大学大学院・人文社会科学研究科 田村　高幸 (Takayuki Tamura)
Graduate School of Humanities and Social Sciences
Chiba University
九州工業大学大学院・工学研究院　加藤　幹雄 (Mikio Kato)
Department of Basic Sciences Kyushu Institute of Technology
岡山県立大学・情報工学部　高橋　泰嗣 (Yasuji Takahashi)
Department of System Engineering
Okayama Prefectural University

1 はじめに

Brodoskii-Milman[2] によって導入された正規構造という性質を利用して、Kirk[5] がバナッハ空間における非拡大写像の弱不動点性を証明して以来、どのような条件の下でバナッハ空間が正規構造を持つかという問題が取り上げられ続けられている。近年、Bynum[3] によって導入された正規構造の性質に関連した弱収束列係数 WCS(X) と Von Neumann-Jordan 定数、 modulus of smoothness、$R(a, X)$ などの他の幾何学的定数との関係が調べられてきている。その際に、重要な役割を果たしているのが Sims[9] によって、バナッハ束の研究から導入された弱直交性係数 $w(X)$ である。ここでは、弱直交性係数 $w(X)$ を介して、前述の研究のうちの最近の成果である、Jimenez-Melado, Llorens-Fuster, Saejung[6] と Mazcuñan-Navarro[7] による研究を紹介し、その一般化について考察する。

2 準備

ここでは、対象となるバナッハ空間を X とし、その閉単位球表面及び単位球をそれぞれ S_X、B_X とする。バナッハ空間の単位球の一様滑らか性を特徴付けるものとして、modulus of smoothness $\rho_X(t)$ が以下のように導入されている。各 $0 \leq t \leq 1$ に対して、

$$\rho_X(t) = \sup\{\frac{1}{2}\Big[\|x+ty\| + \|x-ty\|\Big] - 1 : x, y \in S_X\Big\}$$

この定義は次のように書き換えることができる。各 $0 \leq t \leq 1$ に対して、

$$\rho_X(t) = \sup\{\frac{1}{2}\Big[\limsup_{n\to\infty}\|x_n + ty_n\| + \limsup_{n\to\infty}\|x_n - ty_n\|\Big] - 1 : \{x_n\}, \{y_n\} \subset S_X\Big\}。$$

Mathematics subject classification (2000): 46B20. 46B25
Key words and phrases: Banach space, modulus of smoothness, Von Neumann-Jordan constant, the coefficient of weak orthgonality, normal structure

また、弱直交性係数 (X) は Sims[9] によって、定義されたが、少しわかりやすい次の形のものを用いることにする。

$$w(X) = \inf\left\{\frac{\liminf_{n\to\infty}\|x_n - x\|}{\liminf_{n\to\infty}\|x_n + x\|} : x_n \rightharpoonup 0,\ x_n, x \in X/\{0\}\right\}. \tag{1}$$

$w(X)$ についての評価は $1/3 \leq w(X) \leq 1$ となる。

バナッハ空間 X が非拡大写像に対して (弱) 不動点性をもつとは、 任意の X の非空有界閉凸 (弱コンパクト凸) 部分集合からそれ自身への非拡大写像がいつでも不動点を持つことであると定義する。また、X が (弱) 正規構造を持つとは、X の任意の有界閉凸部分 (弱コンパクト凸) 集合 C が次の性質をもつことである：

ある $x_0 \in C$ が存在して、$\sup_{z\in C}\|x_0 - z\| < \sup_{x,y\in C}\|x - y\|$。

また Von Nemann-Jordan 定数 $C_{NJ}(X)$ は次のように定義されている。

$$\begin{aligned} C_{NJ}(X) &= \sup\left\{\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} : x, y \in X, \|x\|^2 + \|y\|^2 \neq 0\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} : x, y \in B_X, \|x\|^2 + \|y\|^2 \neq 0\right\}, \end{aligned}$$

次に、Bynum[3] によって導入された弱収束列係数 $WCS(X)$ は次のように定義される。

$$WCS(X) = \inf\left\{\frac{\lim_{k\to\infty}\sup\{\|x_n - x_m\| : n, m \geq k\}}{\inf\{\limsup_{n\to\infty}\|x_n - y\| : y \in co(\{x_n\})\}}\right\}、$$

なお、下限はすべての 弱収束列で強収束しない $\{x_n\}$ についてとる。WCS(X) は X が弱収束するが、強収束しない点列を持てば、次のように書くことが出来る ([1] 参照)。

$$WCS(X) = \inf\left\{\lim_{n,m\to\infty, n\neq m}\|x_n - x_m\| : \{x_n\} \subset S_X\right\}、$$

3 結果

以下、X は弱収束するが強収束しない点列を持つバナッハ空間を対象として考察を行う。Jimenez-Melado-Llorens-Fuster-Saejung[6] によって、次の定理が示された。.

定理 A. $C_{NJ}(X) < 1 + w(X)^2$ ならば X は正規構造を持つ。

Mazcuñan-Navarro はまず、次の定理を証明した。

定理 B. $C_{NJ}(X) < 1 + w(X)^2$ ならば $\rho'_X(0) < w(X)$ となる

そして、定理 A を一般化した次の定理を得ている。

定理 C. $\rho'_X(0) < w(X)$　ならば　X は正規構造を持つ。

この証明の際に、鍵になる補題が次のものである。

補題 D.　$\{x_n\}$ を　$\lim_{n,m\to\infty,n\neq m}\|x_m - x_m\| = d$ となる S_X の弱零列とするならば S_X の弱零列 $\{u_n\}, \{v_n\}$, $\{w_n\}$ と S_{X^*} の弱零列 $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ が存在して、以下を満足する。

$$\lim_{n\to\infty} f_n(-u_n) = \lim_{n\to\infty} g_n(u_n) = \frac{1}{d},$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(v_n) \geq \frac{a}{R(a,X)}$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(v_n) \geq \frac{1}{R(a,X)d}$$

and

$$\min\{\lim_{n\to\infty} f_n(w_n), \lim_{n\to\infty} g_n(w_n)\} \geq \frac{w(X)}{d}.$$

ただし、

$$R(a,X) = \sup\{\liminf \|x_n + x\| : x_n \rightharpoonup 0, \{x_n\} \subset B_X, x \in aB_X, \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_m\| \leq 1\}.$$

とする。

次のような空間を考える

$$C_0^w(X) = \{\{x_n\} \in B(X) : \{x_n\} \text{ は 0 に弱収束する、} x_n \in X\}.$$

$$C_0(X) = \{\{x_n\} \in B(X) : \{x_n\} \text{ は 0 に強収束する、} x_n \in X\}.$$

ここで、

$$WN(X) = C_0^w(X)/C_0(X)$$

と定義する。

$\rho_X(t)$ の再定義の式から、次の補題 1 を得る。

補題 1. $\rho'_X(0) < w(X)$　ならば　$\rho_{\{WN(X)\}'}(0) < w(X)$　。

すると、補題 1 、補題 D から定理 C の一般化としての定理 2 を得る。

定理 2. $\rho'_{WN(X)}(0) < w(X)$　ならば　X は弱正規構造を持つ。

参考文献

[1] J.M. Ayerbe, T. Dominguez and G. Lopez, Measure of noncompactness in metric fixed point theory, Birkhaüzer, 1997

[2] M.S. Brodskii and D. P. Milman, On the center of a convex set, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **59**(1948), 837–840.

[3] W.L. Bynum, Normal structure coefficients for Banach spaces, Pacific J. Math, **86**(1980), 427–436

[4] J. Garcia-Falset, E. Llorens-Fuster and E. Mazcuñan-Navarro, *Uniformly nonsquare Banach spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings*, J. Funct. Anal., **266**(2006), 494-514.

[5] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances,* Amer. Math. Monthly **72** (1965), 1004–1006.

[6] A. Jimenez-Melado, E. Llorens-Fuster, S. Saejung, *The von Neumann?Jordan constant, weak orthogonality and normal structure in Banach spaces,* Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), 355?364.

[7] E. Mazcuñan-Navarro, *Banach space properties sufficient for normal structure,* J. Math. Anal. Appl. **337** (2008) 197–218

[8] B. A. Sims, *Orthogonality and fixed point of nonexpansive mapping*, Proc. Centre for Math. Anal. Austral. Nat. Univ. **20**, Austral. Nat. Univ., Canberra, 1988, pp. 178-186.

[9] B. A. Sims, *A class of spaces with weak normal structure*, Bull. Austral. Math. Soc., **50** (1994), 523-528.